



## محاسبه مثلث

«محاسبه مثلث» (triangulation) روشی برای محاسبه تمام ویژگی‌های یک مثلث، فقط با استفاده از اندازه‌گیری یک ضلع و یک زاویه است. این روش متکی بر دانستن مقادیر توابع مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت است.

تصور کنید شاهزاده‌ای سعی در رسیدن به اتاق واقع در بالای برج قصر بدون دروازه را دارد. در این صورت چگونه می‌تواند، ارتفاع پنجره اتاق را بداند، وی در فاصله  $l$  از برج می‌ایستد و  $\theta$ ، زاویه بین پایه برج و پنجره را اندازه می‌گیرد.

با این فرض که برج قائم است، پنجره و پایه آن، نیز، محل شاهزاده، گوشه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه را تشکیل می‌دهند. او اندازه زاویه  $\theta$  و ضلع مجاور  $l$  را می‌داند، و می‌خواهد اندازه  $d$ ، ضلع مقابل زاویه  $\theta$ ، را بداند. در این صورت با قرار دادن این مقادیر در فرمول تانژانت، می‌تواند ملاحظه کند که:  $\tan \theta = \frac{d}{l}$ ، و در نتیجه:

$$d = l \times \tan \theta$$



ترجمه غلامرضا یاسی پور

## اتحادهای مثلثاتی

اتحادهای مثلثاتی عباراتی شامل توابع سینوس، کسینوس و تانژانت‌اند که در مورد جمیع زاویه‌ها برقرارند. قضیه فیثاغورس بر این است که با معلوم بودن یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویه  $\theta$ ، طول ضلع مقابل  $O$ ، طول ضلع مجاور  $A$  و وتر  $H$  داریم:  $O^2 + A^2 = H^2$ . با تقسیم هر دو طرف این معادله بر  $H^2$  به دست می‌آید:

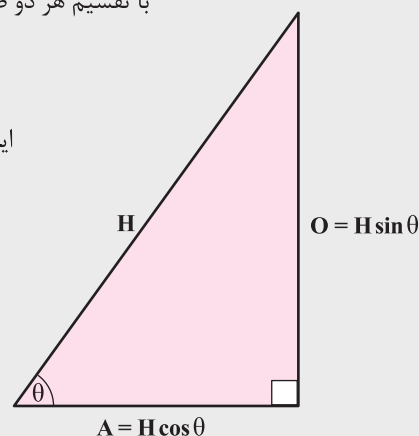
$$\left(\frac{O}{H}\right)^2 + \left(\frac{A}{H}\right)^2 = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{O^2}{H^2} + \frac{A^2}{H^2} = 1$$

این رابطه از آنجا که:  $\sin \theta = \frac{O}{H}$  و  $\cos \theta = \frac{A}{H}$ ، به این

معناست که به ازای هر زاویه  $\theta$ :

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

توجه داشته باشید که شکل  $\sin^2 \theta$  نشان می‌دهد که درباره مربع سینوس  $\theta$  صحبت می‌کنیم، نه سینوس  $\theta$ . این اتحاد در مورد جمیع مقادیر  $\theta$  برقرار است، اما گاهی مطلبی جالب در مورد خود توابع بیان می‌کند. باز توجه داشته باشید که رابطه مزبور در واقع گزاره تازه‌ای از قضیه فیثاغورس است.



در مورد مثلث قائم‌الزاویه‌ای که در آن  $H$  طول وتر و زاویه  $\alpha$  معلوم است، تعاریف سینوس و کسینوس یافتن طول‌های اضلاع دیگر را آسان می‌کند.

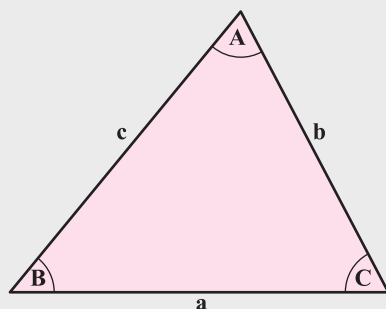
## قاعده‌های سینوس و کسینوس

قاعده‌های سینوس و کسینوس فرمول‌های رابط زاویه‌ها و اضلاع مثلث‌های دلخواه‌اند. مفهوم هم‌نهشتی نشان می‌دهد که در هر مثلث، دو ضلع و زاویه بین آن‌ها، مثلث را مشخص می‌کنند. بنابراین باید یافتن زاویه‌ها و اضلاع دیگر، از این اطلاعات ممکن باشد.

این قاعده‌ها در مورد مثلثی با اضلاع و زاویه‌های نشان داده شده در شکل بعد، عبارت‌اند از:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad (\text{قاعده سینوس‌ها})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (\text{قاعده کسینوس‌ها})$$



اگر زاویه‌ای قائمه باشد، آن‌گاه:  $\cos C = 0$  و قاعده کسینوس‌ها همان قضیه فیثاغورس است. بنابراین، می‌توانیم درباره قاعده کسینوس‌ها به عنوان اصلاح قضیه فیثاغورس در مورد حالاتی بیندیشیم که در آن‌ها  $C$  زاویه‌ای قائمه نیست.